数理解析研究所講究録
362巻 1979年 92-105

Sheaves over cHa and the Heyting valued model $V^{(H)}$

九大 工　下田 守

序

Hをある complete Heyting algebra (cHa) とする. 竹内らによって紹介された Heyting valued model $V^{(H)}$ は Scott-Solovay の Boolean valued model $V^{(B)}$ (Bはある complete Boolean algebra) の拡張であるが, sheaf を意識して作られたことはその定義から明らかであろう. $V^{(H)}$ を category として見るとき, それは (elementary) topos であり, かつ terminal object の subobjects が generators となることが, 示される. すなわち, $V^{(H)}$ は, category としては, well-opened topos である [3]. さて, B をある complete Boolean algebra とするとき, B 上の sheaves の全体と $V^{(B)}$ とが, category として equivalent であることが, 知られている [2]. 本稿では, H上の sheaves の全体と $V^{(H)}$ とが, category として equivalent であることを示す.

1. H上の presheaf と sheaf

Def. 1.1. 次の条件をみたす triple $A = \langle A, E, \urcorner \rangle$ を H上の presheaf という: A は set で, $E = E_A : A \to H$ かつ $\urcorner = \urcorner_A : A \times H \to A$ はそれぞれ map で, $\forall a \in A, \forall p, q \in H$ に対し, 1) $a \urcorner Ea = a$, 2) $E(a \urcorner p) = Ea \wedge p$, 3) $(a \urcorner p) \urcorner q = a \urcorner (p \wedge q)$ をみたす. H上の presheaves $A = \langle A, E, \urcorner \rangle$, $B = \langle B, E, \urcorner \rangle$ に対し, map $f : A \to B$ が次の条件: $\forall a \in A\ \forall p \in H$ に対して, 1) $Ef(a) = Ea$, 2) $f(a \urcorner p) = f(a) \wedge p$ をみたすとき, f を H上の presheaves の間の morphism という.

Remark. この定義は, 竹内[4]にあるものを拡張したものである. これによって決まる, H上の presheaves の全体から成る category を Presh(H) とすれば, Presh(H) は H から $\mathcal{S}$ への contravariant functor 全体の作る category $\mathcal{S}^{H^{op}}$ と同型である. ここに, H は半順序により決まる category ($p \to q \Leftrightarrow p \leq q$) とし, $\mathcal{S}$ は集合全体の category とする.

Def. 1.2. $A = \langle A, E, \urcorner \rangle$ は H上の presheaf で, $a, b \in A$, $C \subseteq A$ とする. $a \urcorner Eb = b \urcorner Ea$ のとき a と b は compatible であるといい, C の任意の二元が compatible なとき C は compatible という.

Def. 1.3. H上の presheaf $A = \langle A, E, \urcorner \rangle$ が次の条件をみたすとき H上の sheaf という: 任意の compatible な subset $C \subseteq A$ に対して, 条件 (1) $\forall c \in C\ a \urcorner Ec = c$, (2) $Ea = \bigvee_{c \in C} Ec$ をみ

たす $a \in A$ が唯一つ存在する．このとき上の a を $\bigvee C$ と表わす．H上の sheaves を objects とする Presh(H) の full subcategory を Sh(H) と表わす．なお，上の条件で“唯一つ”を“高々一つ”に置き換えた条件が成り立つとき，A は separated である，という．

Remark．この定義における separated presheaf および sheaf の概念は，いわゆる canonical Grothendieck topology に対するもので，普通の topology における sheaf などの自然な拡張になっている．Sh(H) は Grothendieck topos である．

Def. 1.4．$A = \langle A, E, \urcorner \rangle$ を H 上の presheaf とする．$a, b \in A$ に対して，$\| a = b \| = \| a = b \|_A = \bigvee \{ p \leq Ea ;\ a \urcorner p = b \urcorner p \}$ とする．

Lemma 1.1．$\forall a, b, c \in A, \forall p \in H$ に対して次の式が成り立つ：

$$\| a = b \| \leq Ea \wedge Eb \qquad \| a = a \| = Ea$$

$$\| a = b \| = \| b = a \| \qquad \| a = b \| \wedge \| b = c \| \leq \| a = c \|$$

$$\| a = b \urcorner p \| = \| a = b \| \wedge p$$

Def. 1.5．$A \in \mathrm{Presh}(H)$，$a, b \in A$ に対して

$$a \sim b \iff a \sim_A b \iff \| a = b \| = Ea = Eb$$

Lemma 1.2．$\sim$ は E, $\urcorner$ と両立する同値関係である．すなわち，$\sim_A$ は A 上の同値関係で，$\forall a, b \in A$ $\forall p \in H$ に対して，$a \sim b \Rightarrow Ea = Eb \wedge a \urcorner p \sim b \urcorner p$ が成り立つ．

Lemma 1.3．$f : A \longrightarrow B$ が presheaves の morphism とする．

$\forall a, a' \in A$ に対し，$\| a = a' \|_A \leq \| f(a) = f(a') \|_B$，$a \sim_A a' \Rightarrow f(a) \sim_B f(a')$.

Lemma 1.4.　$A = \langle A, E, \neg \rangle$ が H 上の presheaf のとき，

A が separated $\Longleftrightarrow \forall a, b \in A \ (a \sim b \Leftrightarrow a = b)$

2.　Heyting valued model $V^{(H)}$

$V^{(H)}$ の構成は，竹内らによるものと全く同様であるが，命題（正確には $V^{(H)}$ の sentence）に対する Heyting value の与え方が異なるので，後の展開にいくらかの差がある．ここでは，atomic formula として $t = s$，$t \in s$ および Et（t, s は項）をもつ first-order intuitionistic language を考える．Et は，"t が存在する" と読み，existence predicate といわれる［1］.（［4］にも似たような体系がある．）なお，Et が常に真とすれば，普通の一階の直観論理となる．

Def 2.1.　超限帰納法により $V^{(H)}$ を次のように定義する：

$V_0^{(H)} = \phi$，$V_{\alpha+1}^{(H)} = \{ u = \langle u, Eu \rangle ; u : D(u) \to H \ \ D(u) \subseteq V_\alpha^{(H)} \ \forall x \in D(u) \ u(x) \leq Ex \wedge Eu \}$

$V_\beta^{(H)} = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha^{(H)}$（$\beta$: limit ordinal）　$V^{(H)} = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha^{(H)}$.

Def. 2.2.　$V^{(H)}$ の sentence φ に対する Heyting value $\| \varphi \| = \| \varphi \|_{V^{(H)}}$ を，帰納法により次のように定義する．まず，atomic formula に対し，$u, v \in V^{(H)}$ のとき，

$\| Eu \| = Eu$，　$\| u \in v \| = \bigvee_{y \in D(v)} (v(y) \wedge \| u = y \|)$

$\| u = v \| = \bigwedge_{x \in D(u)} (u(x) \to \| x \in v \|) \wedge \bigwedge_{y \in D(v)} (v(y) \to \| y \in u \|) \wedge Eu \wedge Ev$.

とする．次に atomic でない sentence に対しては帰納的に，

$\|\neg\varphi\| = \neg\|\varphi\|$，$\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\wedge\|\psi\|$，$\|\varphi\vee\psi\| = \|\varphi\|\vee\|\psi\|$，

$\|\varphi\to\psi\| = \|\varphi\|\to\|\psi\|$，$\|\varphi\leftrightarrow\psi\| = \|\varphi\|\leftrightarrow\|\psi\|$，

$\|\forall x\,\varphi(x)\| = \bigwedge_{u\in V^{(H)}}(Eu\to\|\varphi(u)\|)$，$\|\exists x\,\varphi(x)\| = \bigvee_{u\in V^{(H)}}(Eu\wedge\|\varphi(u)\|)$

と定義する．右辺はいずれも cHa H における演算である．

Remark. $V^{(H)}$ は直観主義的集合論のモデルである．

Def. 2.3. $u, v\in V^{(H)}$ に対して，$u\sim v \iff \|u=v\| = Eu = Ev$.

Lemma 2.1. $V^{(H)}$ の formula $\varphi(x)$ に対して，

$\forall u, v\in V^{(H)}.\quad u\sim v \Rightarrow \|\varphi(u)\| = \|\varphi(v)\|$.

Def. 2.4. $u\in V^{(H)}$ が extensional $\iff \forall x\in D(u)\ \ u(x) = \|x\in u\|$

Def. 2.5. V を集合の universe とする．（$V=\mathcal{S}$）$x\in V$ に対して帰納法により $\check{x}\in V^{(H)}$ を，$D(\check{x}) = \{\check{y}\,;\,y\in x\}$，$E\check{x} = 1$，$\check{x}:\check{y}\mapsto 1$ によって定義する．

Def. 2.6. $u, v\in V^{(H)}$ に対して，$\{u, v\}^H\in V^{(H)}$ を，$D(\{u,v\}^H) = \{u, v\}$，$E\{u,v\}^H = Eu\wedge Ev$，$\{u,v\}^H : x\mapsto Eu\wedge Ev$ によって定義する．また，$\langle u, v\rangle^H = \{\{u,u\}^H, \{u,v\}^H\}^H$ と定義する．

$V^{(H)}$ を category と見るには，$V^{(H)}$ の元全体を objects として，morphisms を適当に決めてやればよいが，ここでは次のように定義する．

Def 2.7. $a, b\in V^{(H)}$ に対し，次の集合 hom(a, b) の元を a から b への morphism という．$f: a\to b$ は f が a から b への写像で

あることを表現する $V^{(H)}$ の formula であるとする．

$$hom(a,b) = \{ f \in V^{(H)} ;\ \| f : a \to b \| = 1,\ f \text{ は extensional},\ Ef = 1,\ D(f) = \{ \langle xy \rangle^H ;\ x \in D(a)\ y \in D(b) \} \}$$

$V^{(H)}$ をこのように category と見るとき，well-opened topos であることが示される［3］が，さらに次の性質が確かめられる．

Prop. 2.1. $\forall a, b \in V^{(H)}$ $\forall f \in hom(a,b)$ に対して

1. f が（$V^{(H)}$ で）mono $\iff$ $\| f$ は Injective $\| = 1$.
2. f が（$V^{(H)}$ で）epi $\iff$ $\| f$ は surjective $\| = 1$
3. f が mono かつ epi $\Rightarrow$ f は（$V^{(H)}$ で）isomorphism.

Prop. 2.2. $\forall a, b \in V^{(H)}$ $a \sim b \Rightarrow a \cong b$

すなわち $a \sim b$ ならば，a と b は（$V^{(H)}$ の object として）同型である．

3. $V^{(H)}$ における presheaf と sheaf

Def. 3.1. $u \in V^{(H)}$, $p \in H$ に対して，$u \restriction p \in V^{(H)}$ を，$D(u \restriction p) = D(u)$, $E(u \restriction p) = Eu \wedge p$, $u \restriction p : x \mapsto u(x) \wedge p$ によって定義する．$A \subseteq V^{(H)}$, $p \in H$ に対して，$A \restriction p = \{ a \restriction p ; a \in A \}$, $A \restriction H = \bigcup_{p \in H} A \restriction p$ とする．$A \subseteq V^{(H)}$ が，$A \restriction H \subseteq A$ をみたすとき A は $\restriction$-closed であるという．

Lemma 3.1. $\forall u \in V^{(H)}$ $\forall p, q \in H$ に対して，

1) $u \restriction Eu = u$, 2) $E(u \restriction p) = Eu \wedge p$, 3) $(u \restriction p) \restriction q = u \restriction (p \wedge q)$.

よって，$A \subseteq V^{(H)}$ が $\restriction$-closed ならば $\langle A, E, \restriction \rangle$ は H 上の presheaf.

実はこのとき，$\langle A, E, \restriction \rangle$ は separated である．

Lemma 3.2. $\forall u, v \in V^{(H)}\ \forall p \in H$ に対して,

1) $\| u \in v \restriction p \| = \| u \restriction p \in v \| = \| u \in v \| \wedge p$

2) $\| u = v \restriction p \| = \| u = v \| \wedge p$

3) u, v が extensional で $D(u) = D(v)$ ならば,

$$\| u = v \| = \bigvee \{ p \leq Eu \, ; \, u \restriction p = v \restriction p \}$$

Def. 3.2. $a, b \in V^{(H)}$ に対して, $a \restriction Eb = b \restriction Ea$ のとき, a と b は compatible であるという. 明らかに, a と b が compatible ならば $D(a) = D(b)$. $C \subseteq V^{(H)}$ の任意の二元が compatible なとき, C は compatible であるという. (なお, $a \restriction Eb \sim b \restriction Ea$ のとき weakly compatible という. これを compatible といい, $a \restriction Eb = b \restriction Ea$ の場合の方を strongly compatible ということもある.)

Prop. 3.1. $C \subseteq V^{(H)}$ が compatible ならば, 次の条件 (1) (2) をみたす $u \in V^{(H)}$ が唯一つ存在する: (1) $\forall c \in C\ u \restriction Ec = c$, (2) $Eu = \bigvee_{c \in C} Ec$

証) u として, $D(u) = \bigcup_{c \in C} D(c) = D(c)\ (c \in C)$, $Eu = \bigvee_{c \in C} Ec$,

$u : x \mapsto \bigvee_{c \in C} c(x)$ と定義すればよい.

Def. 3.3. $C \subseteq V^{(H)}$ が compatible なとき, 上の u を $\bigvee C$ と書く.

Lemma 3.3.

1) $\forall C \subseteq V^{(H)}\ \forall p \in H$ に対して, C が compatible ならば, $C \restriction p$ も compatible で, そのとき $\bigvee (C \restriction p) = (\bigvee C) \restriction p$.

2) $\forall \langle C_i \rangle_{i \in I}$ に対し, $\forall i \in I$. $C_i \subseteq V^{(H)}$ が compatible とする. $B = \{ \bigvee C_i \, ; \, i \in I \}$ とおく. すると, B が compatible $\iff \bigcup_{i \in I} C_i$ が compatible で, そのとき

$\bigvee B = \bigvee(\bigcup_{i \in I} C_i)$ が成り立つ.

Def. 3.4. $u \in V^{(H)}$ とする.

1) u が $V^{(H)}$ の presheaf $\Longleftrightarrow$ $D(u)$ が $\upharpoonright$-closed

2) u が $V^{(H)}$ の sheaf $\Longleftrightarrow$ u が $V^{(H)}$ の presheaf かつ $\forall C \subseteq D(u)$ に対し C が compatible ならば $\bigvee C \in D(u)$.

Remark. u が $V^{(H)}$ の presheaf または sheaf であることは, それぞれ $\langle D(u), E, \upharpoonright \rangle$ が H 上の presheaf または sheaf であることと同じことである.

Theorem 1.

任意の $u \in V^{(H)}$ に対して, 次の条件 1)—3) をみたす $V^{(H)}$ の sheaf v が存在する:

1) $u \sim v$ 2) $\forall x, y \in D(v)$ $D(x) = D(y)$ 3) $\forall x \in D(v)$ x は extensional.

証明)

まず, 各 $x \in D(u)$ に対して, $x_0 \in V^{(H)}$ を, $D(x_0) = \bigcup_{y \in D(u)} D(y)$, $Ex_0 = Ex$, $x_0 : z \longmapsto \| z \in x \|$ によって定義する. 明らかに $x \sim x_0$ である. そこで, $u_0 \in V^{(H)}$ を, $D(u_0) = \{ x_0 ; x \in D(u) \}$, $Eu_0 = Eu$, $u_0 : x_0 \longmapsto \| x \in u \|$ によって定義する. Lemma 2.1. より, $u \sim u_0$. よって u_0 は上の条件 1)—3) をみたす.

次に, $v \in V^{(H)}$ を, $D(v) = \{ \bigvee C ; C \subseteq D(u_0) \upharpoonright H, C$ は compatible $\}$, $Ev = Eu_0$, $v : \bigvee C \longmapsto \bigvee \{ u_0(x_0) \wedge p ; (x_0 \upharpoonright p) \in C \}$ によって

定義する．v は well-defined である．Lemma 3.3 より，v は $V^{(H)}$ の sheaf である．v が条件 2), 3) をみたすことは明らかであるから，1) をみたすことを示すために $u_0 \sim v$ が成りたつことを証明すればよい．

$$\| u_0 = v \| = \bigwedge_{y \in D(u_0)} (u_0(y) \to \| y \in v \|) \wedge \bigwedge_{z \in D(v)} (v(z) \to \| z \in u_0 \|) \wedge Eu_0 \wedge Ev$$

だから，まず $\forall y \in D(u_0)$ に対し $\{y\} \subseteq D(u_0)$ で $\{y\}$ は compatible，$y = \vee \{y\}$，$v(\vee\{y\}) = u_0(y)$．よって，$u_0(y) = v(y) \leq \| y \in v \|$．すなわち，$\bigwedge_{y \in D(u_0)} (u_0(y) \to \| y \in v \|) = 1$．次に，$\forall z \in D(v)$ $z = \vee C$，($C \subseteq D(u_0) \upharpoonright H$，$C$ は compatible) とおける．$\forall y \in D(u_0)$ $\forall p \in H$ $y \upharpoonright p \in C$ とすると，

$$u_0(y) \wedge p \wedge \| y = \vee C \| = u_0(y) \wedge \| y \upharpoonright p = \vee C \| \wedge Ey \wedge p$$
$$= u_0(y) \wedge \| y \upharpoonright p = (\vee C) \upharpoonright E(y \upharpoonright p) \| = u_0(y) \wedge E(y \upharpoonright p) = u_0(y) \wedge p.$$

よって，

$$v(z) \to \| z \in u_0 \| = v(\vee C) \to \| \vee C \in u_0 \| = \Big(\bigvee_{(y \upharpoonright p) \in C} u_0(y) \wedge p\Big) \to \| \vee C \in u_0 \|$$
$$= \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} \Big(u_0(y) \wedge p \to \bigvee_{w \in D(u_0)} (u_0(w) \wedge \| w = \vee C \|)\Big) \geq \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge \| y = \vee C \|)$$
$$= \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge p \wedge \| y = \vee C \|) = \bigwedge_{(y \upharpoonright p) \in C} (u_0(y) \wedge p \to u_0(y) \wedge p) = 1.$$

$$\therefore \bigwedge_{z \in D(v)} (v(z) \to \| z \in u_0 \|) = 1.$$

したがって，$\| u_0 = v \| = Eu_0 = Ev$，すなわち $u_0 \sim v$．

$u \sim u_0$ で，$\sim$ は同値関係だから，$u \sim v$．ゆえに，v は条件 1)－3) をみたす $V^{(H)}$ の sheaf である．

4. H上の sheaves と $V^{(H)}$ との関係

Def. 4.1. H上の sheaf $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ に対して, $\tilde{A}=SA\in V^{(H)}$ を次のように定義する. まず, 各 $a\in A$ に対し $\tilde{a}\in V^{(H)}$ を, $D(\tilde{a})=\{\check{b}\,;\, b\in A\}$, $E\tilde{a}=Ea$, $\tilde{a}:\check{b}\mapsto \|a=b\|_A$ により定義する. そこで $\tilde{A}\in V^{(H)}$ を, $D(\tilde{A})=\{\tilde{a}\,;\, a\in A\}$, $E\tilde{A}=\bigvee_{a\in A} Ea$, $\tilde{A}:\tilde{a}\mapsto Ea$ によって定義する. また, H上の sheaves の間の morphism $f:A\to B$ に対して, $\tilde{f}=Sf\in hom(\tilde{A},\tilde{B})$ を, $\langle ab\rangle^H\mapsto \|f(a)=b\|_B$ $(a\in A, b\in B)$ によって定義する. これらの対応は well-defined であり, $Sh(H)$ から $V^{(H)}$ への functor $S: Sh(H)\to V^{(H)}$ を定める. H上の sheaf A に対して, $\varphi_A: A\to D(\tilde{A})$ $a\mapsto\tilde{a}$ とする.

Prop. 4.1. $A=\langle A, E, \urcorner\rangle$ をH上の sheaf, $a, b\in A$ とすると,

1) $\forall p\in H$. $\widetilde{a\urcorner p}=\tilde{a}\upharpoonright p$ すなわち, $\varphi_A(a\urcorner p)=\varphi_A(a)\upharpoonright p$.

2) $\|\tilde{a}=\tilde{b}\|_{V^{(H)}}=\|a=b\|_A$

3) $\tilde{a}=\tilde{b}\iff a=b$

4) $\tilde{a}$ と $\tilde{b}$ が ($V^{(H)}$で) compatible $\iff$ a と b が (Aで) compatible

5) $\tilde{A}$ は $V^{(H)}$ の sheaf で, $\varphi_A:\langle A, E, \urcorner\rangle\to\langle D(\tilde{A}), E, \upharpoonright\rangle$ は isomorphism.

証) 1): 定義より明らか. 2): Lemma 3.2. 3) による.

3): $\tilde{a}=\tilde{b}\iff Ea=Eb\wedge \forall c\in A\ \|a=c\|_A=\|b=c\|_A\iff a\sim b$ Lemma 1.4. より $a\sim b\iff a=b$. 4): 1) と 3) より明らか. 5): 1) より $D(\tilde{A})$ は $\upharpoonright$-closed かつ $\varphi_A: A\to D(\tilde{A})$ は $Presh(H)$ の morphism. 3) より φ_A は bijective, よって isomorphism. したがって $\tilde{A}$ は $V^{(H)}$ の sheaf である.

Prop 4.2. Functor $\mathcal{S} : Sh(H) \to V^{(H)}$ は full かつ faithful.

証)

1. $\mathcal{S}$ は faithfull, i.e. $\forall f_1, f_2 : A \to B$ in $Sh(H)$ $\mathcal{S}f_1 = \mathcal{S}f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$

∵) $\mathcal{S}f_1 = \mathcal{S}f_2 \iff \tilde{f_1} = \tilde{f_2} \iff \forall a \in A\ \forall b \in B\ \tilde{f_1}(\langle \tilde{a}\tilde{b}\rangle) = \tilde{f_2}(\langle \tilde{a}\tilde{b}\rangle)$

$\iff \forall a \in A\ \forall b \in B\ \| f_1(a) = b \| = \| f_2(a) = b \| \iff \forall a \in A\ \ f_1(a) \sim f_2(a)$

$\iff \forall a \in A\ \ f_1(a) = f_2(a)$ (B は separated) $\iff f_1 = f_2$.

2. $\mathcal{S}$ は full, i.e. $\forall A, B \in Sh(H)\ \forall g \in hom(\tilde{A}, \tilde{B})\ \exists f : A \to B$ in $Sh(H)$. $g = \mathcal{S}f$.

∵) $g \in hom(\tilde{A}, \tilde{B})$ とする. まず, 各 $a \in A$ に対して

$C_a = \{ \check{b} \restriction \| \langle \tilde{a}\tilde{b}\rangle \in g \| ;\ b \in B \}$ とおく. $C_a \subseteq D(\tilde{B})$ で compatible である. ∵) $\forall b_1, b_2 \in B$ に対し, $c_1 = \check{b_1} \restriction \| \langle \tilde{a}\tilde{b_1}\rangle \in g \|$, $c_2 = \check{b_2} \restriction \| \langle \tilde{a}\tilde{b_2}\rangle \in g \|$ とおく. $c_1, c_2 \in C_a$ で $D(c_1) = D(c_2) = \{ \check{b} ; b \in B \}$, $Ec_1 = \| \langle \tilde{a}\tilde{b_1}\rangle \in g \|$, $Ec_2 = \| \langle \tilde{a}\tilde{b_2}\rangle \in g \|$ である. g は $V^{(H)}$ の写像だから, $\forall b \in B$ に対し

$(c_1 \restriction Ec_2)(\check{b}) = c_1(\check{b}) \wedge Ec_2 = \| b = b_1 \|_B \wedge \| \langle \tilde{a}\tilde{b_1}\rangle \in g \| \wedge \| \langle \tilde{a}\tilde{b_2}\rangle \in g \|$

$= \| \tilde{b} = \tilde{b_1} \| \wedge \| \tilde{b_1} = \tilde{b_2} \| \wedge Ec_1 \wedge Ec_2 \leq \| \tilde{b} = \tilde{b_2} \| \wedge Ec_1 \wedge Ec_2$

$= \| b = b_2 \|_B \wedge Ec_2 \wedge Ec_1 = c_2(\check{b}) \wedge Ec_1 = (c_2 \restriction Ec_1)(\check{b})$ 同様に,

$(c_2 \restriction Ec_1)(\check{b}) \leq (c_1 \restriction Ec_2)(\check{b})$ $\therefore\ c_1 \restriction Ec_2 = c_2 \restriction Ec_1$.

次に, $\psi : D(\tilde{A}) \to D(\tilde{B})$ を, $\tilde{a} \mapsto \bigvee C_a$ によって定義する. さらに, $f = \varphi_B^{-1} \circ \psi \circ \varphi_A : A \to B$ とおく. すなわち, $f : A \to B$ で $f : a \mapsto b$ s.t. $\tilde{b} = \psi(\tilde{a})$ である. ($\widetilde{f(a)} = \psi(\tilde{a})$). $\forall a \in A, \forall p \in H$ に対し, $C_{a \restriction p} = C_a \restriction p$ が成り立つから, $\bigvee(C_{a \restriction p}) = (\bigvee C_a) \restriction p$. 明らかに, $E(\bigvee C_a) = Ea$ (g は写像). よって f は morphism である.

ここで, $\forall a \in A \quad \|\tilde{a} \in \tilde{A}\| \leq \|\langle \tilde{a}\, \psi(\tilde{a})\rangle \in g\|$ が成り立つ.

$\because$) $\|\tilde{a} \in \tilde{A}\| \leq \|\exists y \langle \tilde{a}\, y\rangle \in g\| = \bigvee_{b \in B} \|\langle \tilde{a}\, \tilde{b}\rangle \in g\| = \bigvee_{b\in B} \|\tilde{b} \upharpoonright \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\| = \vee C_a\|$

$= \bigvee_{b \in B} (\|\tilde{b} = \vee C_a\| \wedge \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\|) = \bigvee_{b\in B} (\|\tilde{b} = \psi(\tilde{a})\| \wedge \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\|) \leq \|\langle \tilde{a}\, \psi(\tilde{a})\rangle \in g\|$.

Def 4.1 により $\tilde{f} \in hom(\tilde{A}, \tilde{B})$ が定義されるが, $\forall a \in A\ \forall b \in B$ に対し, $\tilde{f}(\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle^{V}) = \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in \tilde{f}\| = \|\psi(\tilde{a}) = \tilde{b}\| \wedge \|\tilde{a} \in \tilde{A}\|$ (Prop 4.1. 2)).

$\leq \|\psi(\tilde{a}) = \tilde{b}\| \wedge \|\langle \tilde{a}\, \psi(\tilde{a})\rangle \in g\| \leq \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\| = g(\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle^{V})$

逆に, $g(\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle^{V}) = \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\| = \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\| \wedge \|\tilde{a} \in \tilde{A}\|$

$\leq \|\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle \in g\| \wedge \|\langle \tilde{a}\, \psi(\tilde{a})\rangle \in g\| \leq \|\psi(\tilde{a}) = \tilde{b}\| \wedge \|\tilde{a} \in \tilde{A}\| = \tilde{f}(\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle^{V})$

$\therefore \forall a \in A\ \forall b \in B \quad \tilde{f}(\langle a\, b\rangle^{V}) = g(\langle \tilde{a}\,\tilde{b}\rangle^{V}) \quad D(\tilde{f}) = D(g)$ だから, $\tilde{f} = g$.

すなわち, $g = \mathfrak{S} f$ となる.

Theorem 2.

Functor $\mathfrak{S} : Sh(H) \longrightarrow V^{(H)}$ は category の equivalence である. すなわち, 2つの category $Sh(H)$ と $V^{(H)}$ とは, equivalent である.

証明)

$\mathfrak{S}$ は full かつ faithful であるから, $V^{(H)}$ の任意の object u に対して, $\tilde{A} \cong u$ (in $V^{(H)}$), すなわち $V^{(H)}$ で u と $\tilde{A}$ が同型になるような H 上の sheaf A が存在することを証明すればよい.

$u \in V^{(H)}$ とする. Theorem 1 により, $V^{(H)}$ の sheaf v で,

1) $u \sim v$ 2) $\forall x, y \in D(v)\ D(x) = D(y)$ 3) $\forall x \in D(v)$ x は extensional

をみたすものが存在する. そこで, $A = D(v)$ とおけば,

$\mathcal{A}=\langle A, E, \restriction\rangle$ は H 上の sheaf である．$\forall a, b\in A$ に対して

$\|a=b\|_A=\|a=b\|_{V^{(H)}}$ が成り立つ

∵) $\forall p\in H$ $p\leq Ea$, $a\restriction p=b\restriction p$ とすると $\|a=b\|\wedge p=E(a\restriction p)=p$

∴ $p\leq\|a=b\|_{V^{(H)}}$. よって $\|a=b\|_A=\bigvee\{p\leq Ea; a\restriction p=b\restriction p\}\leq\|a=b\|_{V^{(H)}}$

逆に $\|a=b\|_{V^{(H)}}=p$ とおくと，$p\leq Ea\wedge Eb$ で $\forall x\in D(a)=D(b)$ に対し $p\leq a(x)\leftrightarrow b(x)$．$E(a\restriction p)=E(b\restriction p)=p$ $\forall x\in D(a\restriction p)=D(b\restriction p)$ に対し，$(a\restriction p)(x)=a(x)\wedge p=b(x)\wedge p=(b\restriction p)(x)$ ∴ $a\restriction p=b\restriction p$. ∴ $\|a=b\|_{V^{(H)}}\leq\|a=b\|_A$.

したがって，Prop 4.1.2) より $\forall a, b\in A$. $\|\tilde{a}=\tilde{b}\|_{V^{(H)}}=\|a=b\|_{V^{(H)}}$.

そこで，$f\in hom(\mathcal{V}, \tilde{A})$ を，$D(f)=\{\langle a\tilde{b}\rangle^{V}; a\in D(\mathcal{V})\ \tilde{b}\in D(\tilde{A})\}$,

$f:\langle a\tilde{b}\rangle^{V}\longmapsto\|a=b\|=\|\tilde{a}=\tilde{b}\|$ によって定義する．f は well-defined である．さらに，$\forall\tilde{a}\in D(\tilde{A})$ $\|\tilde{a}\in\tilde{A}\|=\|\tilde{a}=\tilde{a}\|=\|a=a\|$ $=\|\langle a\tilde{a}\rangle\in f\|\leq\|\exists x\langle x\tilde{a}\rangle\in f\|$ ∴ $\|f$ は surjective $\|=1$,

$\forall a_1, a_2, b\in A$ $\|\langle a_1\tilde{b}\rangle\in f\|\wedge\|\langle a_2\tilde{b}\rangle\in f\|=\|a_1=b\|\wedge\|a_2=b\|\leq\|a_1=a_2\|$

∴ $\|f$ は injective $\|=1$．よって Prop 2.1. より f は epi かつ mono, すなわち $f:\mathcal{V}\cong\tilde{A}$．Prop 2.2. より $\mathcal{U}\cong\mathcal{V}$．よって，$\mathcal{U}\cong\tilde{A}$.

したがって，定理が証明された．

Remark. $Sh(H)$ は well-opened topos であることが知られているので，この定理により，$V^{(H)}$ が well-opened topos であることの別証明が得られる．

References

[1] M.P. Fourman, The logic of topoi, in: Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977.

[2] A. Kock and G.E. Reyes, Doctrins in categorical logic, in: ibid.

[3] 下田 守, Heyting valued model $V^{(H)}$ について, シンポジウム「数理論理学の数学への応用」(1979.3.) にて報告, 同報告集掲載予定.

[4] 竹内外史, 層・圏・トポス, 日本評論社, 1978.